ماز

دوپینگ فوری
شب امتحان

خلاصه فشرده برای مرور سریع

ریاضی دوازدهم تجربی

فصل اول

تابع چندجمله‌ای

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ را که در آن $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

مثال:

توابع زیر نمونه‌ای از توابع چندجمله‌ای هستند:

$y=\sqrt{2}x-x^2$ (چندجمله‌ای درجه دوم)

$y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$ (چندجمله‌ای درجه ۵)

نکته طلایی

به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

به کمک اتحاد بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

- اگر n فرد باشد:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$$

- اگر n زوج باشد:

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1})$$

مثال:

هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته‌شده تجزیه کنید.

الف) x^6-1 با عامل $(x+1)$:

$$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

ب) x^6-1 با عامل $(x-1)$:

$$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

مثال:

چندجمله‌ای x^5+32 را برحسب عامل $(x+2)$ تجزیه کنید.

$$x^5+32=x^5+2^5\Rightarrow\begin{cases}n=5\\a=2\end{cases}$$

$$x^5+32=(x+2)\left(x^4-2x^3+4x^2-8x+16\right)$$

یکنوایی توابع:

صعودی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
نزولی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
اکیداً صعودی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
اکیداً نزولی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

مثال:

مجموعه جواب نامعادله $\log(x+1) \le \log(2x-3)$ را به دست آورید:

چون تابع $y = \log x$ ، تابعی اکیداً صعودی است بنابراین با برداشتن لگاریتم از طرفین نامعادله فوق، جهت نامعادله عوض نمی‌شود، یعنی:

$$\log(x+1) \le \log(2x-3) \Rightarrow (x+1) \le (2x-3) \Rightarrow x-4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4$$

مثال:

مجموعه جواب نامعادله $(\frac{1}{3})^{2x+1} \le (\frac{1}{27})$ را به دست آورید:

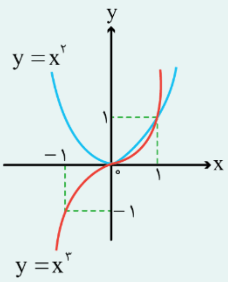
$$(\frac{1}{3})^{2x+1} \le (\frac{1}{27}) \Rightarrow (\frac{1}{3})^{2x+1} \le (\frac{1}{3})^3$$

چون تابع $y = (\frac{1}{3})^x$ ، تابعی اکیداً نزولی است پس با برداشتن پایه‌ها از طرفین نامساوی فوق، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$2x+1 \ge 3 \Rightarrow 2x \ge 2 \Rightarrow x \ge 1$$

نکات طلایی

در مقایسه توابع $y = x^3$ و $y = x^2$ داریم:



- در بازه $(0,1)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.
- در بازه $(-\infty,0)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.
- در بازه $(1,+\infty)$: نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

ترکیب توابع:

اگر f و g دو تابع باشند، fog را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$(fof)(x) = f(f(x))$$

مثال:

اگر $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = 2x+1$ باشند، ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ را به‌دست آورید.

$(gof)(x) = g(f(x))$، پس در تابع $g(x)$ به جای x ها، تابع $f(x) = x^2 - 2$ را جایگذاری و ساده می‌کنیم.

$$g(f(x)) = 2f(x)+1 = 2(x^2-2)+1 = 2x^2-3$$

نکته طلایی

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال:

اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد، دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

$$\begin{cases} D_f=[1,+\infty) \\ D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid 2x^2-1\in[1,+\infty)\}$$

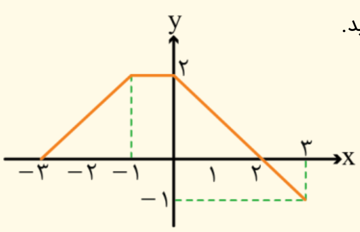
$$\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

هر آنچه باید در مورد خواص و ویژگی‌های تبدیل و انتقال نمودارها بدانید!

نمودار جدید $(a,k>0)$		توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$		نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$		نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$		نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$		نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ)
$f(kx)$	$k>1$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$0<k<1$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k>1$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$0<k<1$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$\lvert f(x)\rvert$		ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$f(\lvert x\rvert)$		ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$\lvert y\rvert=f(x)$		ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مثال:

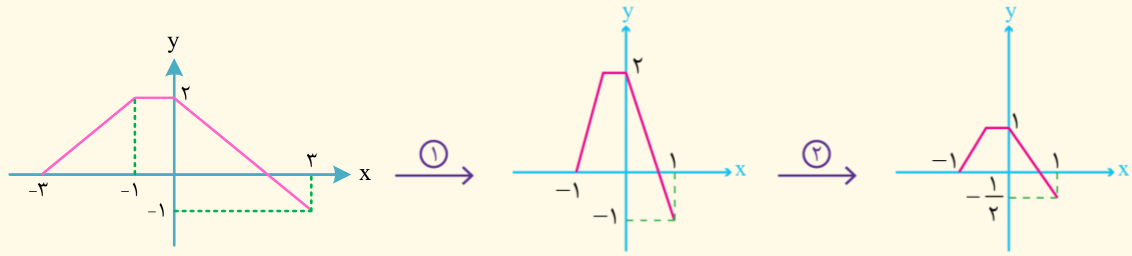
نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{2}f(3x)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



پاسخ:

برای رسم نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{2}f(3x)$، ابتدا باید نمودار تابع f را با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای محور x ها منقبض کرده و سپس نمودار حاصل را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور y ها منقبض کنیم به عبارتی:

$$f(x)\xrightarrow[(1)]{\text{انقباض طولی } \frac{1}{3} \text{ برابر}} f(3x)\xrightarrow[(2)]{\text{انقباض عرضی } \frac{1}{2} \text{ برابر}} \frac{1}{2}f(3x)$$



دامنه تابع g: $[-۱,۱]$ برد تابع g: $\left[-\frac{۱}{۲},۱\right]$

نکته طلایی

در فرایند رسم تابع $y=af(bx+c)+d$، از روی تابع $f(x)$، ترتیب مراحل به‌صورت زیر است:

الف) تأثیرات روی دامنه
- ۱) تأثیر عدد ثابت c
- ۲) تأثیر ضریب x (b)

ب) تأثیرات روی برد
- ۱) تأثیر ضریب f (a)
- ۲) تأثیر عدد ثابت d

نکته طلایی

در تابع $y=af(bx+c)+d$، تأثیر a و d روی برد تابع و تأثیر c و b روی دامنهٔ تابع است.

نکته۳:

اگر دامنه تابع $y=f(x)$ برابر $[m,n]$ باشد دامنه تابع $g(x)=af(bx+c)+d$ برابر است با:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{دامنه}} m\le x\le n \xrightarrow[\text{پیدا می‌کنیم.}]{\text{محدوده ورودی f را}} m\le x\le n$$

$\downarrow$ ورودی

محاسبه محدوده x که همان دامنه g است. $\Leftarrow m\le bx+c\le n \xleftarrow[\text{ثابتی دارد.}]{\text{ورودی f محدوده}}$

مثال:

اگر دامنهٔ تابع $y=۲f\left(\frac{x}{۲}-۴\right)+۳$ برابر $[-۲,۶)$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=-۳f(۲x+۱)$ را به‌دست آورید.

دامنه: $-۲\le x<۶$

محدودهٔ ورودی f را محاسبه می‌کنیم:

$$-۱\le\frac{x}{۲}<۳\Rightarrow -۵\le\frac{x}{۲}-۴<-۱\Rightarrow -۵\le \text{ورودی } f<-۱\Rightarrow -۵\le ۲x+۱<-۱\Rightarrow -۶\le ۲x<-۲\Rightarrow -۳\le x<-۱$$

$$\Rightarrow D_g=[-۳,-۱)$$

نکته طلایی

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \le x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

$\boxed{[x] < n \Rightarrow x < n}$ $\boxed{[x] > n \Rightarrow x \ge n+1}$

$\boxed{[x] \le n \Rightarrow x < n+1}$ $\boxed{[x] \ge n \Rightarrow x \ge n}$

مثال:

$$[x] \ge -2 \Rightarrow x \ge -2$$
$$[x] < 4 \Rightarrow x < 4$$
$$[x] \le 4 \Rightarrow x < 5$$
$$-1 < [x] \le 3 \Rightarrow 0 \le x < 4$$
$$-1 \le [x] < 3 \Rightarrow -1 \le x < 3$$

تابع وارون:

در تابع وارون داریم:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

مثال:

در تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$، حاصل $f^{-1}(3)$ را به‌دست آورید.

فرض می‌کنیم که $f^{-1}(3) = \alpha$ باشد در این‌صورت به جای حل این معادله، معادله $f(\alpha) = 3$ را حل می‌کنیم، پس:

$$f(\alpha) = 3 \Rightarrow \sqrt{\alpha+3} = 3 \Rightarrow \alpha + 3 = 9 \Rightarrow \alpha = 6$$

پس $f^{-1}(3) = 6$ است.

نکته طلایی

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال:

ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ را به‌دست آورید:

$$f(x) = \frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y = \frac{-8x+3}{2}$$
$$\Rightarrow 2y = -8x + 3 \Rightarrow 2y - 3 = -8x \Rightarrow x = \frac{2y-3}{-8}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y-3}{-8} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{-8}$$

نکته طلایی

برای این‌که نشان دهیم دو تابع وارون‌پذیر f و g وارون یکدیگرند، باید ثابت کنیم که ترکیب دو تابع f و g، تابع همانی است به عبارت دیگر باید ثابت کنیم که:

$$\begin{cases} (fog)(x) = x \\ (gof)(x) = x \end{cases}$$

مثال:

نشان دهید که توابع $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)-4=3\left(\frac{x+4}{3}\right)-4=x \qquad (x\in D_g)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+4}{3}=\frac{(3x-4)+4}{3}=x \qquad (x\in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

فصل دوم

دوره تناوب توابع

دوره تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید:

$$\begin{matrix} y=a\sin^n(bx+c)+d \\ y=a\cos^n(bx+c)+d \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} T=\frac{2\pi}{|b|} & \text{فرد باشد } n \\ T=\frac{\pi}{|b|} & \text{زوج باشد } n \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y=a\tan^n(bx+c)+d \\ y=a\cot^n(bx+c)+d \end{matrix} \xrightarrow[\text{و چه فرد}]{n \text{ چه زوج باشد}} T=\frac{\pi}{|b|}$$

$$\begin{matrix} y=|a\sin(bx+c)| \\ y=|a\cos(bx+c)| \end{matrix} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

مثال:

$$y=\sin 2x \Rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$y=\cos^2 4x \Rightarrow T=\frac{\pi}{4}$$

$$y=|5\sin 3x| \Rightarrow T=\frac{\pi}{3}$$

$$y=2\sin 2x\cos 2x \Rightarrow y=\sin 4x \Rightarrow T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

نکته طلایی

نکته ۱: در توابع مثلثاتی $y=a\sin(bx+d)+c$ و $y=a\cos(bx+d)+c$، داریم:

$$\text{بیش‌ترین مقدار}: |\text{ضریب } \sin \text{ یا } \cos| + \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \max=|a|+c$$

$$\text{کم‌ترین مقدار}: -|\text{ضریب } \sin \text{ یا } \cos| + \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \min=-|a|+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a|=\frac{\max-\min}{2} \\ c=\frac{\max+\min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب}=\frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$$

نکته ۲: در تابع مثلثاتی $y=a\tan(bx)+c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T=\frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

مثال:

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید:

$$\bullet\ y=-۳\cos ۲\pi x+۱ \Rightarrow \begin{cases} T=\dfrac{۲\pi}{|b|}=\dfrac{۲\pi}{|۲\pi|}=۱ \\ \max=|a|+c=|-۳|+۱=۳+۱=۴ \\ \min=-|a|+c=-|-۳|+۱=-۳+۱=-۲ \end{cases}$$

$$\bullet\ y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x \Rightarrow \begin{cases} T=\dfrac{۲\pi}{|b|}=\dfrac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|}=۴ \\ \max=|a|+c=|-۱|+\sqrt{۳}=۱+\sqrt{۳} \\ \min=-|a|+c=-|-۱|+\sqrt{۳}=-۱+\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\bullet\ y=۱-۲\sin\left(-\frac{\pi}{۳}x\right) \Rightarrow \begin{cases} T=\dfrac{۲\pi}{|b|}=\dfrac{۲\pi}{\left|-\frac{\pi}{۳}\right|}=۶ \\ \max=|a|+c=|-۲|+۱=۲+۱=۳ \\ \min=-|a|+c=-|-۲|+۱=-۲+۱=-۱ \end{cases}$$

مثال:

معادله یک تابع سینوسی $y=a\sin(bx)+c$ را بنویسید که برد آن $[-۴,۴]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

می‌دانیم که دوره تناوب اصلی تابع برابر ۲ است پس:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۲ \Rightarrow |b|=\frac{۲\pi}{۲}=\pi \Rightarrow b=\pm\pi$$

از طرفی نیز برد تابع برابر $[-۴,۴]$ است یعنی:

$$\begin{cases} \max=|a|+c=۴ \\ \min=-|a|+c=-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a|+c=۴ \\ -|a|+c=-۴ \end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲c=۰ \Rightarrow c=۰ \xrightarrow{|a|+c=۴} |a|=۴ \Rightarrow a=\pm۴$$

حال:

$$\begin{cases} a=\pm۴ \\ b=\pm\pi \\ c=۰ \end{cases} \Rightarrow y=\pm۴\sin(\pm\pi x) \Rightarrow \begin{cases} y=۴\sin(\pi x) \\ y=-۴\sin(-\pi x) \\ y=۴\sin(-\pi x) \\ y=-۴\sin(\pi x) \end{cases}$$

روابط مثلثاتی زاویه‌های دو برابر کمان

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^۲\alpha = \dfrac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \\ \cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^۲\alpha = \dfrac{۱-\cos ۲\alpha}{۲} \end{cases}$$

مثال:

مقدار عددی $\sin ۱۵^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\sin^۲\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}}$$

می‌دانیم $\sin ۱۵^\circ$ مثبت است پس:

$$\sin ۱۵^\circ = \sqrt{\frac{۱-\cos ۳۰^\circ}{۲}} = \sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

به عنوان تمرین $\sin ۲۲/۵^\circ$ رو خودتون به‌دست بیارین!

مثال:

مقدار عددی $\cos ۲۲/۵^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}}$$

می‌دانیم $\cos ۲۲/۵^\circ$ مثبت است پس:

$$\cos ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\frac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲}} = \sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\sin ۲x = \begin{cases} ۲\sin x\cos x \\ \dfrac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} \end{cases}$$

$$\cos ۲x = \begin{cases} \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos^۴ x - \sin^۴ x \\ ۲\cos^۲ x - ۱ \Rightarrow ۱+\cos ۲x = ۲\cos^۲ x \\ ۱-۲\sin^۲ x \Rightarrow ۱-\cos ۲x = ۲\sin^۲ x \\ \dfrac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x} \end{cases}$$

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$$

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x)=\sin g(x)$:

$$\sin f(x)=\sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2k\pi+g(x) \\ f(x)=2k\pi+\pi-g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x=0$	$x=k\pi$
$\sin x=1$	$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$
$\sin x=-1$	$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

مثال:

معادله مثلثاتی $\sin 2x=\sin x$ را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+x \\ 2x=2k\pi+\pi-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال:

معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha-\sin\alpha+1=1$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

می‌دانیم که $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ است، پس:

$$\left(1-2\sin^2\alpha\right)-\sin\alpha+1=1 \Rightarrow 2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \sin\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z} \\ \sin\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad ,\quad k\in\mathbb{Z} \\ \alpha=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\quad ,\quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال:

معادله مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطه $\sin 2x=2\sin x\cos x$ داریم:

$$2\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{6}\quad ,\quad k\in\mathbb{Z} \\ x=k\pi+\frac{\pi}{3}\quad ,\quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته طلایی

معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x)=\cos g(x)$:

$$\cos f(x)=\cos g(x)\ \Rightarrow \begin{cases} f(x)=۲k\pi+g(x) \\ f(x)=۲k\pi-g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

جواب کلی	معادله
$x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$\cos x=۰$
$x=۲k\pi$	$\cos x=۱$
$x=(۲k+۱)\pi$	$\cos x=-۱$

مثال:

معادله مثلثاتی $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید.

$$۲\cos^۲ x-۹\cos x-۵=۰ \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \cos x=۵ \xrightarrow{-۱\le \cos x\le ۱} \text{غ ق ق} \\ \cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\ ,\quad k\in\mathbb{Z} \\ x=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳}\ ,\quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

فصل سوم

رفع ابهام

در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد هر دو تابع f و g در $x=a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\dfrac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک عواملی نظیر اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سؤالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارت‌های رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفر کننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b\\ \left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^{2}}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^{2}}\right)=a\pm b\end{cases}$$

مثال:

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^{2}-9}{2-\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^{2}-9}{2-\sqrt{x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^{2}-9\right)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{(2)^{2}-\left(\sqrt{x+1}\right)^{2}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^{2}-9\right)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{4-(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{-\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\left(-(x+3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)\right)=-6\times 4=-24$$

$$2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^{2}-5x+6}{2x^{2}-7x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(2x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{1}{5}$$

$$3)\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^{2}+3x+2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^{2}+3x+2}\times\frac{\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x+2)\left(\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{1}{1\times(3)}=\frac{1}{3}$$

نکته طلایی

در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این‌صورت حاصل حد، نامتناهی($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه:

برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\dfrac{-\text{عدد}}{0^{+}}=-\infty$	$\dfrac{+\text{عدد}}{0^{-}}=-\infty$	$\dfrac{-\text{عدد}}{0^{-}}=+\infty$	$\dfrac{+\text{عدد}}{0^{+}}=+\infty$

مثال:

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۵^-}\frac{۲x}{x-۵}=\frac{۲\times ۵}{۵^- -۵}=\frac{۱۰}{۰^-}=-\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}=\frac{۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱}{\left(۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱\right)^۲}=\frac{-۲+۱}{(-۱+۱)^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

توجه:

وقتی به جزءصحیح و یا قدرمطلق برخورد می‌کنیم، باید جزءصحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

$$۱)\ \lim_{x\to ۰^-}\frac{[x]}{\sin x}=\frac{\left[۰^-\right]}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{\left[۳^-\right]-۳}{۳^- -۳}=\frac{۲-۳}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۳}\frac{۲}{|x-۳|}=\frac{۲}{|۳-۳|}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to\left(-\frac{۱}{۳}\right)}\frac{[x]}{|۳x+۱|}=\frac{\left[-\frac{۱}{۳}\right]}{\left|۳\left(-\frac{۱}{۳}\right)+۱\right|}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

در محاسبه $(m,n\in\mathbb{N})$; $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\cdots}$ حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این‌صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیش‌ترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیش‌تر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کم‌تر باشد.	صفر

مثال:

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳-۵x+۱}{۶x^۳-۱۱x^۲-۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳}{۶x^۳}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۷}{۲x^۳}=\lim_{x\to-\infty}\left(-۲x^۴\right)=-۲(-\infty)^۴=-۲(+\infty)=-\infty$

مشتق

مشتق تابع $f(x)$ در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

با انتخاب $x-a=h$ داریم:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال ۱:

اگر $f(x)=۱-۲x^۲$ باشد، $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۱-۲x^۲+۱}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۲(۱-x)(۱+x)}{x+۱}=۴$$

مثال ۲:

با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}+۱$ را در نقطهٔ $x=۱$ محاسبه کنید.

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\left(\sqrt{x}+۱\right)-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)\left(\sqrt{x}+۱\right)}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳:

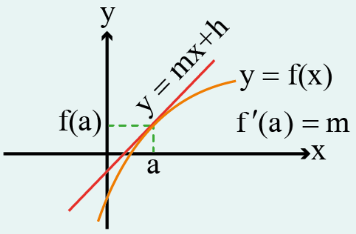
با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۵$ به‌دست آورید.

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt{x-۱}-۲}{x-۵}\times\frac{\sqrt{x-۱}+۲}{\sqrt{x-۱}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{x-۵}{(x-۵)\left(\sqrt{x-۱}+۲\right)}=\lim_{x\to ۵}\frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

نکته طلایی

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در $x=a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطهٔ تماس هم در تابع و هم در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند.



مثال:

با استفاده از تعریف مشتق، معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ را در نقطه‌ای به طول $x=۱$ به‌دست آورید.

$$m=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+۲x-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۳)}{x-۱}=۴$$

$$y-۶=۴(x-۱)\ \Rightarrow\ y=۴x+۲$$